



TITLE:

AI^{ξ} の周辺の理論とその証明論的順序数(二階算術の証明論)

AUTHOR(S):

志村, 立矢

CITATION:

志村, 立矢. AI^{ξ} の周辺の理論とその証明論的順序数(二階算術の証明論). 数理解析研究所講究録 1988, 669: 1-15

ISSUE DATE:

1988-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100736>

RIGHT:

AI_{\aleph}^- の周辺の理論とその証明論的順序数.

東京大 志村 立矢 (Tatsuya Shimura)

AI_{\aleph}^- は, 新井 [3] において定義された一階の理論である。彼は, 竹内による二階の自然数論の部分体系の無矛盾性証明を, 改良・簡素化することで, [1] の結果と合わせて, AI_{\aleph}^- の証明論的順序数が, ordinal diagrams $O(\aleph+1, 1)$ の $<_0$ に関する順序型で表せることを示した。

本稿では, AI_{\aleph}^- の可述的拡大と部分体系 $W-AI_{\aleph}^- + AI_{\aleph}^-$ (\aleph は limit, $\aleph < \omega$) の証明論的順序数の計算について述べる。

§1. 本稿を通して, 次の性質をみたす原始帰納的な整列順序 $<$ をひとつ固定して考える。

- 1) 0 を最小元, ω を最大元として持つ。
- 2) successor, predecessor を表わす関数 $\lambda x. x \oplus 1$, $\lambda x. x \ominus 1$ は共に原始帰納的である。
- 3) $<$ が線型順序であること, 及び 1), 2) の事実は,

PRA (原始帰納的算術) で証明できる。

\prec を用いて, 原始帰納的述語 \prec' , I を次のように定義する。

$$a \prec' b \iff a \prec b \wedge b \prec \omega$$

$$I(a) \iff a \prec \omega$$

まず, 次の公理を ACA_0 につけ加えて得られる二階の体系を考えてみよう。

$$(\Pi'_1 - CA)_{\omega}^- \quad \exists X \forall i \prec \omega \forall x (x \in X_i \equiv \forall Y \mathcal{Q}_2(Y, X_{\omega i}, i, x))$$

但し, $\mathcal{Q}_2(Y, Z, a, b)$ は, Y を一項 Z を二項の述語変数とし, 他に自由変数を含まない算術的論理式, $X_i, X_{\omega i}$ は abstract $\{x\} X(i, x)$, $\{x, y\} (x \prec i \wedge X(x, y))$ である。

この体系の中で \prec' に沿っての超限帰納法が公理の形では証明できることが, 竹内 [9] により示されている。従って, 上の公理中の $X_i (i \prec \omega)$ の一意性が保証されるので, 各 \mathcal{Q}_2 に対し二項の述語定数 $Q_{\omega i}^{\mathcal{Q}_2}$ を導入し, 体系を *sequent* を用いた形に書き換えると, PA に次の始式及び推論図をつけ加えたものになる。

$Q_{\omega i}^{\mathcal{Q}_2}$ initial sequent

$$t \prec \omega, Q_{\omega i}^{\mathcal{Q}_2} \rightarrow \mathcal{Q}_2(V, Q_{\omega i}^{\mathcal{Q}_2}, t, \omega)$$

但し, V は二階の quantifier を含まない abstract.

induction axiom

$$F(0), \forall x (F(x) \supset F(x+1)) \rightarrow F(t)$$

但し, $F(x)$ は二階の quantifier を含まない論理式.

$Q^{\text{de}}: \text{right}$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \mathcal{L}_e(X, Q^{\text{de}}_x t, t, \Delta)}{t \text{ とき}, \Gamma \rightarrow \Delta, Q^{\text{de}}_x t \Delta}$$

但し, X は下式に現れない.

second order $\forall: \text{right}$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, F(X)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall X F(X)}$$

但し, X は下式に現れない.

second order $\forall: \text{left}$

$$\frac{F(V), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall X F(X), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

但し, ① $F(V)$ は二階の quantifier を含まないか,

② V は自由変数.

この体系を一階の部分に制限すれば, $AI_{\frac{1}{2}}^-$ となるので, この体系を $(AI_{\frac{1}{2}}^-)_0$ と呼ぶことにする. $(AI_{\frac{1}{2}}^-)_0$ の証明図を与えたとき, 二階の quantifier を持つ論理式を cut formula とする cut は消去できるので, $(AI_{\frac{1}{2}}^-)_0$ は $AI_{\frac{1}{2}}^-$ の保存拡大である.

注意) second order $\forall: \text{left}$ において, V は二階の quantifier を含まないとしても同じ体系が得られるが, 上のようにすることで, 二階の quantifier を持つ論理式の複雑さが, grade だけ

で計れるという利点がある。これに関しては、新井[2]の AII の定義及び Schütte [7] p.199 の rank の定義を参照されたい。(この Schütte の定義には誤植がある。)

§2. ordinal diagrams $O'(\varepsilon+1, \alpha)$

$(J, <)$ を順序型 α の整列順序とする。このとき, ordinal diagrams $O(I^{\varepsilon+1}, J)$ の定義 (cf. [8], §26) を少し変更して, $O'(\varepsilon+1, \alpha)$ を定義しよう。

定義

1. O は o.d. (ordinal diagram) である。
- 2.1 μ が o.d. で $i < \varepsilon$ ならば $(i, 0, \mu)$ は c.o.d. である。
- 2.2 μ が o.d. で $\alpha \in J$ ならば $(\varepsilon, \alpha, \mu)$ は c.o.d. である。
3. μ_1, \dots, μ_n が c.o.d. ならば, $\mu_1 \# \dots \# \mu_n$ は o.d. である。

ordinal diagram μ, ν と $i \leq \varepsilon$ に対し, 関係 $\mu <_i \nu$ " μ は ν の i -section である." 等は通常 of 定義に従う。

定義 順序 $<_i$ ($i \leq \varepsilon$)

$$\mu <_i \nu \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha <_i \nu (\mu \leq_i \alpha) \\ \vee (\forall \alpha <_i \mu (\alpha <_i \nu) \wedge \mu <_j \nu)$$

ここで, $j = j_0(i, \mu, \nu)$.

定義 順序 $<_\varepsilon$

1. O は $<_\varepsilon$ に関して最小元である。

- 2 $\#$ は natural sum とし て解釈する。
- 3 $(i, a, \mu) <_{\sharp} (j, b, \nu)$ は次のとき成り立つ。
- 3.1 $i < j$ または
- 3.2 $i = j$ かつ
- 3.2.1 $a < b \wedge \mu <_i (j, b, \nu)$ または
- 3.2.2 $a = b \wedge \mu <_i \nu$ または
- 3.2.3 $a > b \wedge (i, a, \mu) \leq_i \nu$.

定義よりただちに次のことがわかる。

命題

1. $O'(\sharp+1, 1)$ は $O(\sharp+1, 1)$ と一致する。
2. $O'(1, \alpha)$ の $<_{\alpha}$ に関する順序構造は, $\phi_{\alpha}(0)$ (最小の α -critical number) までの順序数の構造と一致する。

$O'(\sharp+1, \alpha)$ の i -accessible part A_i ($i < \sharp$) と, i -fan F_i ($i \leq \sharp$) を $O(\sharp+1, 1)$ の場合と同様に次のように定める。

$A_i : (O'(\sharp+1, \alpha) \cap F_i, <_i)$ の accessible part.

$F_i(\mu) \iff \forall j < i \forall \alpha <_j \mu \ A_j(\alpha)$.

A_i ($i < \sharp$), F_i ($i \leq \sharp$) は AI_{\sharp}^{-} の中で定義することができ, しかも $O(\sharp+1, 1)$ と同様次のことが成立する。

補題 (cf. 新井 [1])

$\text{Prog}[F_{\sharp}, <_{\sharp}, X]$ で次の論理式を表わす。

$$\forall \mu (F_{\xi}(\mu) \wedge \forall \nu <_{\xi} \mu (F_{\xi}(\nu) \supset X(\nu)) \supset X(\mu)).$$

また $TI[F_{\xi}, <_{\xi}, \mu]$ で次の論理式を表わす。

$$F_{\xi}(\mu) \wedge \forall X (Prog[F_{\xi}, <_{\xi}, X] \supset \forall \nu <_{\xi} \mu (F_{\xi}(\nu) \supset X(\nu)))$$

このとき、次が成り立つ。

$$(AI_{\xi}^{-}). \vdash TI[F_{\xi}, <_{\xi}, (\xi, 0, 0)].$$

この補題の証明は、新井[1]の Lemma 1.5 までの証明がそのままの形で使える。その意味でも、順序 $<_{\xi}$ そのものより $<_{\xi}$ を F_{ξ} に制限した順序構造がよい性質を持っていそうな気がするのだが、次の事実はそのことを一層明らかにする。

補題

$F_{\xi}(\mu)$, $F_{\xi}(\nu)$ 及び $\mu <_{\xi} (\xi, a, \nu)$ が成り立つとせよ。このとき次のいずれかが成立するということが、 AI_{ξ}^{-} で証明できる。

1. ν は limit かつ

$$\exists p <_{\xi} \nu (F_{\xi}(p) \wedge \mu <_{\xi} (\xi, a, p)).$$

2. $\nu = p \# 0$ かつ

2.1 a は limit かつ

$$\exists b < a \quad \mu <_{\xi} (\xi, b, (\xi, a, p)). \quad \text{または}$$

2.2 a は b の successor で

$$\exists n \quad \mu <_{\xi} \omega((\xi, b), n, (\xi, a, p)) \quad \text{または}$$

2.3 $a = 0$ かつ

$$\exists n \mu <_{\varepsilon} (\varepsilon, a, p) \# \dots \# (\varepsilon, a, p) \quad (n \text{個の和})$$

3. $\omega = 0$ かつ

3.1 a は limit かつ

$$\exists b < a \mu <_{\varepsilon} (\varepsilon, b, 0)$$

3.2 a は b の successor で

$$\exists n \mu <_{\varepsilon} \omega((\varepsilon, b), n, 0)$$

3.3 $a = 0$.

但し, $\omega((\varepsilon, a), n, \mu) = (\varepsilon, a, (\varepsilon, a, \dots (\varepsilon, a, \mu)))$ (n 回)

この補題で $\varepsilon = 0$ の場合を考えると, よく知られた $\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造に関する定理に他ならない。すなわち, 順序集合 $(F_{\varepsilon}, <_{\varepsilon})$ の構造は $\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造とほとんど同じである。但し, この主張には例外があり, $\mu <_{\varepsilon} (\varepsilon, 0, 0)$ の時この補題は何も言っていない。

§3. $(AI_{\varepsilon}^-)_0$ の可述拡大の証明論的順序数。

S を適当な可述的な公理又は推論法則とする。このとき, $(AI_{\varepsilon}^-)_0 + S$ の証明論的順序数を計算する方法を考えてみよう。そのために, S に対し次の仮定をおくことにする。

仮定1 $|ACA_0 + S| \leq \phi_{\alpha}(0)$ が reduction で証明できる。

仮定2 $\phi_{\alpha}(0)$ より小さな各順序数までの超限帰納法は, $\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造だけに依存した推論

を用いて $ACA_0 + S$ で証明できる。

この仮定を満たす S としては、最も簡単なものでは BR (bar rule), はるかに一般的なものとしては $ramified\ analysis$ (cf. Schütte [7], Feferman [5], Schmerl [6]) がある。

定理

S が仮定 2 を満たすとする。このとき次が成り立つ。

$$|(AI_{\bar{\varepsilon}})_0 + S| \geq |O'(\bar{\varepsilon}+1, \alpha)|_{<}.$$

但し、右辺は $O'(\bar{\varepsilon}+1, \alpha)$ の $<_{\circ}$ に関する順序型である。

証明は $|ACA_0 + S| \geq \phi_2(0)$ の証明において、順序 $(\phi_2(0), <)$ を $(\bar{\varepsilon}, <_{\bar{\varepsilon}})$ で置き換え、関数 γ_a (定義は Schütte [7] p84) を $(\bar{\varepsilon}, a, \cdot)$ で置き換えればよい。これが証明となることは、§2 の補題により確かめられる。

逆向きの不等式については、次が成り立つ。

定理

可述的な S が仮定 1 を満たすとする。このとき、

$$|(AI_{\bar{\varepsilon}})_0 + S| \leq |O'(\bar{\varepsilon}+1, \alpha)|_{<}.$$

S は可述的なので、 $(AI_{\bar{\varepsilon}})_0 + S$ の reduction は $AI_{\bar{\varepsilon}}$ に対するものと $ACA_0 + S$ に対するものを単純に組み合わせればよい。

例として、 BR の場合を考えることにする。まず BR は substitution

$$\frac{I(X) \rightarrow \Delta(X)}{I(V) \rightarrow \Delta(V)}$$

(但し, 上式は二階の quantifier を含まず, 下式は X を含まない。
また V は任意の abstract (二階の quantifier を含んでもよい。)

と同等であることを注意しておく。

$\text{Prog}[X]$ と $I[a]$ を各々 " X は progressive", " a までの超限帰納法" を表わす論理式とする。このとき, $\text{ACA}_0 + \text{BR}$ で ω_2 より小さな各順序数までの超限帰納法は次を用いて証明される。

1. $\text{ACA}_0 \vdash I[\omega^0]$
2. $\text{ACA}_0 \vdash I[\omega^0] \supset \text{Prog}[\{x\} I[\omega^x]]$
3. $\text{ACA} \vdash I[\omega^0] \supset \text{Prog}[\{x\} I[\varepsilon_x]]$
4. $\text{ACA}_0 + \text{BR} \vdash I[t] \text{ ならば}$
 $\text{ACA}_0 + \text{BR} \vdash \text{Prog}[\{x\} I[\varepsilon_x]] \supset I[\varepsilon_t]$

このうち, 2と3の証明には, $b < \omega^{a+1} \supset \exists n (b < \omega^a \cdot n)$ や $a < \varepsilon_0 \supset \exists n (a < \omega^{\omega^n})$ 等の性質しか用いていないので, $I[\cdot]$ を $\text{TI}[F_{\frac{1}{2}}, <_{\frac{1}{2}}, \cdot]$, $\text{Prog}[X]$ を $\text{Prog}[F_{\frac{1}{2}}, <_{\frac{1}{2}}, X]$, ω^a, ε_a を各々 $(\frac{1}{2}, 0, a), (\frac{1}{2}, 1, a)$ で置き換えた論理式は $(\text{AI}_{\frac{1}{2}})_0 + \text{BR}$ で証明できる。また 1 に関しては補題により $(\text{AI}_{\frac{1}{2}})_0$ で証明できることが確かめられている。また 4 に対応するものは BR により証明できるので。

各 $\mu \in O'(\frac{1}{2}+1, 2)$ に対し $\text{TI}[F_{\frac{1}{2}}, <_{\frac{1}{2}}, \mu]$ がわかる。一方,

$$AI_{\xi}^- \vdash \text{Prog} [F_{\xi}, <_{\xi}, \{\mu\} \forall i \in \mathbb{N} A_i(\mu)]$$

なので、各 μ に対し $A_0(\mu)$ が証明できる。

次に、 $(AI_{\xi}^-)_0 + BR$ の reduction の方法を述べる。初めに注意したように、BR は substitution として導入する。

二階の quantifier を持つ論理式の degree を ξ と定める他は、degree, grade, height 等の定義は新井[3]に準ずる。また各 sequent への ordinal diagram の対応は cut の下式に対し、次のように定めることとする。

$$\text{cut} \frac{S' \quad S''}{S}$$

$$O(S) = \begin{cases} (\omega(\xi, 0), h(S') - h(S), O(S') \# O(S'')) & \begin{array}{l} S', S \text{ 共に二階の quantifier を含むか,} \\ \text{共に含まないとき。} \end{array} \\ (\xi, 1, \omega(\xi, 0), h(S'), O(S') \# O(S'')) & \begin{array}{l} S' \text{ は二階の quantifier を含み, } S \text{ は含ま} \\ \text{ないとき。} \end{array} \end{cases}$$

このとき、証明図の ordinal diagram が reduction を普通の方法で行な、たとき減少することが容易にわかり、

$$|(AI_{\xi}^-)_0 + BR| \leq |O'(\xi+1, 2)|_{<}$$

が示される。

ramified analysis の場合も同様にして、

$$|RA^{\omega}| = \phi_{1+\gamma}(0)$$

であることより,

$$|(AI_{\Sigma}^-)_0 + RA^{\omega}| = |O'(\Sigma+1, 1+\gamma)|_{<_0}$$

が導びかれる。またこの系として,

$$|(AI_{\Sigma}^-)_0 + RA^{\alpha}| = \alpha$$

となる最小の α は,

$$\begin{cases} O_0 = O(\Sigma+1, 1) \\ O_{n+1} = O'(\Sigma+1, (O_n, <_0)) \end{cases}$$

としたときの $\bigcup_n O_n$ の $<_0$ に関する順序型で与えられることがわかる。

§4. $W-AI_{\Sigma}^- + AI_{\eta}^-$ の証明論的順序数。

次に一階の理論 AI_{Σ}^- の部分体系について考えることにする。

AI_{Σ}^- の論理式の複雑さを計るのに用いられる degree は, 次のように定義される。

$$d(Qt\Delta) = \begin{cases} i \oplus 1 & t \text{ は closed で } i \text{ はその値を表わす数でかつ } i < \Sigma \\ 0 & t \text{ は closed で } \neg(i < \Sigma) \\ \Sigma & t \text{ が closed でないとき。} \end{cases}$$

$$d(t \prec t' \wedge Q t, s) = \begin{cases} i & t \text{ は closed で } i \prec \xi \text{ のとき。} \\ 0 & t \text{ は closed で } \neg(i \prec \xi) \text{ のとき。} \\ \xi & t \text{ が closed でないとき。} \end{cases}$$

$d(A \wedge B)$ 等は $\max \{d(A), d(B)\}$ として定められる。

以下では, ξ は limit とする。このとき degree ξ の論理式はさらに次の2種に分類できる。

- ・一階の自由変数にどんな数字を代入しても, degree が ξ より小さくなるもの。
- ・それ以外の論理式。

前者に含まれる論理式を weak と呼ぶことにする。abstract に対しても同様に weak という概念が定まる。

AI_{ξ}^{-} において, Q^{fe} initial sequent に現れる V は weak と制限して得られる体系を $W-AI_{\xi}^{-}$ と名付ける。 $\eta \prec \xi$ をひとつ定めたとき, $W-AI_{\xi}^{-} + AI_{\eta}^{-}$ の証明論的順序数が計算できる。

定理 ([10])

$|W-AI_{\xi}^{-} + AI_{\eta}^{-}|$ は $O(\xi+1, 1)$ の ordinal diagram $(\xi, (\eta, (\eta \oplus 1, 0)))$ が順序 $<_{\xi}$ に関して定める順序型に等しい。

$(\xi, (\eta, (\eta \oplus 1, 0)))$ が lower bound であることは

$$W-AI_{\xi}^{-} \vdash \text{Prog}[F_{\xi}, <_{\xi}, \{\mu\} \bar{A}((\xi, \mu))].$$

及び 各 $\mu <_{\xi} (\eta, (\eta \oplus 1, 0))$ に対し

$$W-AI_{\xi}^{-} + AI_{\eta}^{-} \vdash F_{\xi}(\mu) \supset \text{TI}[F_{\xi}, <_{\xi}, \mu].$$

が成立することよりわかる。

逆に $(\xi, (\eta, (\eta \oplus 1, 0)))$ が upper bound であることは, 証明図が reduction を行なったとき, 次の条件をみたすようにできることによる。

定義

証明図 P が η -bounded であるとは, 各 substitution J が次の条件をみたすこととする。

1. upper segment の degree $< \xi$.
2. $\eta \leq$ upper segment の degree ならば, J より下に現れる substitution のうち最も上にあるものと J との間に degree ξ の論理式は現れない。

また各 segment への ordinal diagram の対応は, μ に対し (i, μ) を対応させた時, 順序 $<_{\xi}$ に対し,

$(\oplus 1, 0) \leq_{\xi} \mu$ ならば collapsing function として働く

$(i, 0) \leq_{\xi} \mu <_{\xi} (\oplus 1, 0)$ ならば $\lambda \alpha, \omega^{\alpha}$ として働く

という事実を用いて, Pohlers [4] による ordinal の対応付けを翻訳して与えることができる。

§5. AI_{ξ}^{-} の周辺の open problems.

1. reflection principle と超限帰納法.

算術的論理式については, uniform reflection principle は,

$\forall \mu \in O(\xi+1, 1)$ $A_0(\mu)$ と同値であることが示されている。しかし、degree i の論理式 ($0 < i \leq \xi$) に対する uniform reflection principle と $\forall \mu \in O(\xi+1, 1)$ $A_i(\mu)$ との関係はどうか、っているか？

2. AI_{ξ}^{-} の部分体系 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq AI_{\xi}^{-}$ で、 $|S_n|$ が $(\xi, \dots (\xi, 0))$ となる自然なものをみつけよ。例えば、induction formula を制限したものはどうか。

参考文献

- [1] T. Arai An accessibility proof of ordinal diagrams in intuitionistic theories for iterated inductive definitions, Tsukuba J. of Math. 8 (1984) 209-218.
- [2] " A subsystem of classical analysis proper to Takeuti's reduction method for Π_1' -analysis. Ibid. 9 (1985) 21-29.
- [3] " A consistency proof of a system including Feferman's ID_{ξ} by Takeuti's reduction method. ibid. 11 (1987) 227-239.
- [4] W. Buchholz et al., Iterated inductive definitions and subsystems of analysis : - - - - LN in Math. 897, Springer (1981).

- [5] S. Feferman, Systems of predicative analysis I, II.
J.S.L. 29 (1964) 1-30 ; J.S.L. 33 (1968) 193-220.
- [6] U.R. Schmerl, A proof-theoretical fine structure in systems
of predicative analysis.
Arch. Math. Logik Grundlag. 22 (1982) 167-186.
- [7] K. Schütte, Proof theory. Springer (1977).
- [8] G. Takeuti, Proof theory (second revised edition).
North-Holland (1987).
- [9] " , On the inductive definition with quantifiers of second order.
J. of Math. Soc. of Japan. 13 (1961) 333-341.
- [10] T. Shimura, The proof-theoretic ordinals of Arai's theory AI_{Σ}^- .
to appear. weakened versions of